ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ №2

Сызықты теңдеулер жүйесі және оларды шешу әдістері. Фундаменталды шешімдер жүйесі. Базистік және бос белгісіздер.

Есеп 1. Жоғарыда көрсетілген әдістерді қолданып, теңдеулер жүйесін шеш.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5 \end{cases}$$

Шешуі:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad r(A) = r(\overline{A}) = 3$$

Ендеше жүйесінің тек бір ғана шешімі бар.

а) *Матрицалық әдіс.* жүйені $AX = B$ түрінде жазамыз, мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Кері матрицаны тапсақ

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ендеше $X = A^{-1}B$ теңдігін қолданып X матрицасын табамыз:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

немесе

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Бұдан $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$

б) *Крамер ережесі.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5 \end{cases}$$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad r(A) = r(\overline{A}) = 3$$

$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$ табамыз.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -4 .$$

бұдан

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2 .$$

в) *Гаусс әдісі*. Бірінші және екінші теңдеулердің орнын ауыстырамыз

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5 \end{cases}$$

Бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз. Енді, бірінші теңдеуді (–1)-ге көбейтіп, үшінші жолға қосамыз. Сонымен, біз екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ \quad\; -8x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Екінші жолды ($-\frac{8}{11}$)-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз. Сөйтіп, үшінші теңдеудегі x_2 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad -11x_2 - 3x_3 = -5 \\ \qquad\qquad \frac{2}{11}x_3 = -\frac{4}{11} \end{cases}$$

Енді төменнен жоғары қарай біртіндеп белгісіздерді табалық: үшінші теңдеуді шешіп $x_3 = -2$, табылған $x_3 = -2$ мәнін екінші теңдеуге қойып, шешсек $x_2 = 1$. Табылған $x_3 = -2$, $x_2 = 1$ мәндерін бірінші теңдеуге қойсақ, $x_1 = -1$ болады.

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесі

Есеп 2: Біртектес теңдеулер жүйесін шеш: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Гаусс әдісімен шығарамыз. Екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 айнымалысын жоямыз

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 \\ \quad x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} .$$